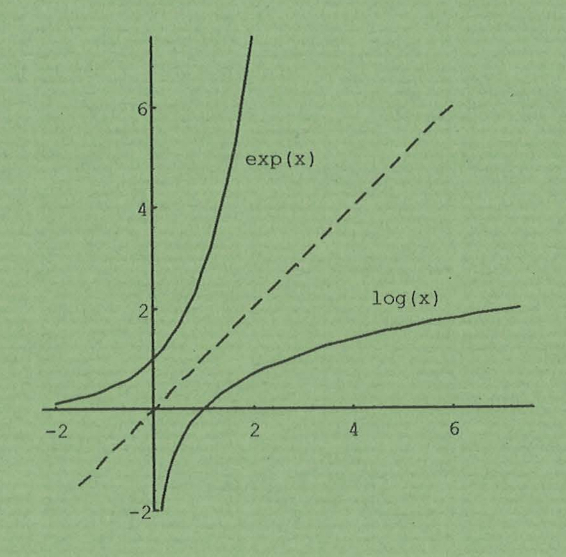
FUNCIONES DE UNA VARIABLE

por

MIGUEL DE UNAMUNO ADARRAGA



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-7-06

FUNCIONES DE UNA VARIABLE

por

MIGUEL DE UNAMUNO ADARRAGA

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-7-06

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

NUEVA NUMERACIÓN

1 Área
16 Autor
05 Ordinal de cuaderno (del autor)

Funciones de una variable

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Nadezhda Vasileva Nicheva
CUADERNO 171.01/ 3-07-06
ISBN: 84-9728-114-4
Depósito Legal: M-41675-2004

I - Funciones reales de variable real. Límites y continuidad

Llamamos *función real de variable* real a cualquier aplicación f de un intervalo I (abierto, cerrado o semiabierto, acotado o no) en el cuerpo real, $f : I \to \mathbb{R}$. A la imagen de cada $x \in I$ la llamaremos $f(x)$, y a la función f la representaremos también alguna vez así: $x \mapsto f(x)$. [*Notación:* obsérvese que el símbolo "$\to$" se usa entre *conjuntos*, "$\mapsto$" entre *números*.]

Decimos que una función f es acotada (superior o inferiormente, o ambas cosas) si el conjunto imagen de f, $f(I) = \{f(x) | x \in I\} \subset \mathbb{R}$, lo es.

Dadas dos funciones f y g de I en $\mathbb{R}$, definimos la función $f+g$ de I en $\mathbb{R}$ así: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, y análogamente las funciones producto $f \cdot g$, valor absoluto $|f|$, inversa para el producto $\frac{1}{f}$ si $f(x) \neq 0$ en I, y potencia f^g si $f(x) > 0$ en I (escríbanse).

Como caso particular del general de cualquier aplicación, la *gráfica* de una función f es el conjunto de pares de números reales (puntos del plano) $\{(x, f(x)) | x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$, y la *imagen* de f, como ya hemos dicho, el conjunto de números reales $\{f(x) | x \in I\} \subset \mathbb{R}$.

Límites

La idea de límite es la idea básica de todo el Cálculo. Manejamos en éste conjuntos no ya infinitos sino continuos, que sólo con esta noción pueden tratarse. Todos los conceptos fundamentales del Cálculo (continuidad, derivada, integral) se basan en él.

Definición 1. Sean $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I}$, $l \in \mathbb{R}$; decimos que l es el límite de f en x_0, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, si y sólo si para todo entorno V de l existe un entorno U de x_0 tal que $x \in U - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$ ($x \in (U - \{x_0\}) \cap I \Rightarrow f(x) \in V$, en rigor).

Definición 2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Ambas definiciones son equivalentes. Y hay que hacer una observación: decimos $x_0 \in \overline{I}$, es decir, x_0 podría no estar en I si éste no es cerrado, podría f no estar siquiera

definida en ese punto, y por ello la condición es que $x \in U - \{x_0\}$, o lo que es lo mismo, $0 < |x - x_0|$; lo que ocurra en el punto x_0 mismo es irrelevante.

Es evidente la *unicidad* del límite en caso de que exista, derivada del hecho de que dos puntos distintos de $\mathbb{R}$ tienen siempre dos entornos *disjuntos*.

Ejemplos

1. $sg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $sg(x) = \begin{cases} 1 \ si \ 0 < x \\ 0 \ si \ x = 0 \\ -1 \ si \ x < 0 \end{cases}$ (función *signo*): $\lim_{x \to x_0} sg(x) = 1$ si $x_0 > 0$, $\lim_{x \to x_0} sg(x) = -1$ si $x_0 < 0$, $\nexists \lim_{x \to 0} sg(x)$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 \ si \ x \in \mathbb{Q} \\ 0 \ si \ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ (función de Dirichlet): $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$ cualquiera que sea $x_0 \in \mathbb{R}$.

3. $f : \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{sen\, x}{x}$ (*); es sabido que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. Aquí tenemos un ejemplo de límite de una función en un punto en el que no está definida.

Operaciones con límites

Teorema. Si *f* y *g* son funciones de *I* en $\mathbb{R}$ con límites *l* y *m* respectivamente en un punto x_0, entonces $\exists \lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = l + m$, $\exists \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = l \cdot m$.

Demostración. La haremos sólo para la suma como ejemplo del modo de razonar:

$$\forall \varepsilon > 0 \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f - l| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g - m| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |(f + g)(x) - (l + m)| < \frac{\varepsilon}{e} + \frac{\varepsilon}{e} = \varepsilon \right). \blacksquare$$

Teorema. Si *f* y *g* son funciones de *I* en $\mathbb{R}$ con límites *l* y *m* respectivamente en un punto x_0, entonces $\exists \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$; si $f(x) \neq 0$ en *I* y $l \neq 0$, $\exists \lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l}$, y si $f(x) > 0$ en *I* y $l > 0$, $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = l^m$.

Omitiremos la demostración.

(*) Supondremos conocida la definición elemental geométrica de las funciones trigonométricas, así como las propiedades básicas de éstas.

Continuidad

Es otro concepto fundamental, que intuitivamente significa que una función *no da saltos*, es decir, que tiene en cada punto el valor al que *parece acercarse*. Daremos tres definiciones equivalentes de continuidad en un punto.

Definición 1. Sean $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$; decimos que *f* es continua en x_0 si y sólo si $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definición 2. *f* es continua en x_0 si y sólo si para todo entorno *V* de $f(x_0)$ existe un entorno *U* de x_0 tal que $x \in U \Rightarrow f(x) \in V$.

Definición 3. *f* es continua en x_0 si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Si una función es continua en todos los puntos de un intervalo *I*, decimos que es continua en I.

Ejemplos

En los *1*, *2* y *3* de más arriba, la función *sg* es continua en $\mathbb{R}^*$, la función de Dirichlet no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}$ (o, como se dice también, es *discontinua* en todos), y la función $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ es continua en $\mathbb{R}^*$, pero si completamos su definición haciendo $f(0) = 1$ será continua en $\mathbb{R}$ (es lo que se llama *completar por continuidad*).

4. $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} & si \;\; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ Es evidente que, al acercarse *x* a 0, $f(x)$ va tomando valores tan grandes como se quiera, y desde luego no tiene límite 1; y los otros valores de *x* en $[0,1]$ no plantean problemas: *f* es continua en $(0,1]$.

Operaciones con funciones continuas

Teorema. Sean *f* y *g* dos funciones continuas en un punto x_0; entonces su suma $f + g$ y su producto $f \cdot g$ son continuas en x_0; y como consecuencia, si *f* y *g* son continuas en un intervalo *I*, su suma y su producto lo son también.

Demostración. Inmediata; por ejemplo, para la suma: si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) +$ $+ \lim\limits_{x \to x_0} (g(x)) = f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0)$; y lo mismo para el producto. ■

Teorema. Sean *f* y *g* dos funciones continuas en un punto x_0; entonces la función $|f|$ lo es también, como lo son $\frac{1}{f}$ [si $f(x_0)\neq 0$] y f^g [si $f(x_0)>0$]. Análogamente si la continuidad es en un intervalo.

Composición de funciones continuas

Teorema. si f es continua en *I*, *g* es continua en *J* y $f(I)\subset J$, entonces $g\circ f$ es continua en *I*.

Demostración. Sea un punto genérico $x_0\in I$; llamemos $y_0=f(x_0)\in J$; para todo entorno *W* de $g(y_0)=g\circ f(x_0)$ existe, por la continuidad de *g*, un entorno *V* de y_0 tal que $y\in V\Rightarrow g(y)\in W$; pero, para este entorno *V* de y_0 existe, por la continuidad de *f*, un entorno *U* de x_0 tal que $x\in U\Rightarrow f(x)\in V$; luego en definitiva, para todo entorno *W* de $g(y_0)=g\circ f(x_0)$ existe un entorno *U* de x_0 tal que $x\in U\Rightarrow g\circ f(x)\in W$, y $g\circ f$ es continua en x_0, y por lo tanto en *I*. ■

Algunas funciones continuas

Son inmediatas la continuidad de una función constante y la de la función $f(x)=x$. Como consecuencia, son continuas las funciones *enteras* (definidas por *polinomios*, es decir, expresiones de la forma $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$, donde *n* es un número natural y los coeficientes a_k son números reales) en toda la recta real $\mathbb{R}$, y las funciones *racionales* (cocientes de polinomios) en intervalos en los que no se anule el denominador.

Si conocemos la continuidad de las funciones *sen* y *cos* y de las funciones exponencial y logarítmica, y aplicamos lo que acabamos de ver acerca de operaciones que producen funciones continuas a partir de funciones continuas, tendremos una clase ya muy amplia de funciones (las llamadas *funciones elementales*) cuya continuidad conocemos.

Propiedades de las funciones continuas

Teorema (Bolzano). Si *f* es continua en $I=[a,b]$, con $f(a)\neq f(b)$, y es $\mu\in\mathbb{R}$ tal que $f(a)<\mu<f(b)$ o bien $f(b)<\mu<f(a)$, entonces existe un $c\in I$ tal que $\mu=f(c)$.

Consecuencia: la imagen continua de un intervalo (acotado o no) es un intervalo.

Teorema. Una función continua en un intervalo cerrado y acotado (*compacto*) es acotada.

Contraejemplos: $f(x)=\frac{1}{x}$ en $(0,1)$ (función continua en intervalo no cerrado),

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in\mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$ en $[0,1]$ (función en intervalo cerrado, no continua).

Teorema (Weierstrass). Una función continua en un intervalo cerrado alcanza sus extremos; es decir, éstos son máximo y mínimo.

Contraejemplos: $f(x)=sen\,x$ en $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(x)=x-[x]$ (parte decimal de *x*) en $[0,3]$.

Demostración. Por reducción al absurdo. Sea *f* continua en el intervalo cerrado *I*, y sea, por ejemplo, $M=\sup_{x\in I} f(x)$, y supongamos que el teorema es falso, es decir, que para todo $x\in I$ es $f(x)<M$; la función $\varphi: I\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$ es continua por serlo *f* y no anularse el denominador, luego tiene un supremo μ, positivo por serlo la función, y se verifica que, para todo $x\in I$, $\dfrac{1}{M-f(x)}\le\mu$, $\dfrac{1}{\mu}\le M-f(x)$, $f(x)\le M-\dfrac{1}{\mu}<M$, y *M* no es la mínima cota superior de *f*: *contradicción*; existe algún $x_0\in I$ tal que $M=f(x_0)$. Y análogamente para el ínfimo. ■

Como consecuencia de los tres últimos teoremas: la imagen continua de un intervalo compacto (cerrado y acotado) es un intervalo compacto.

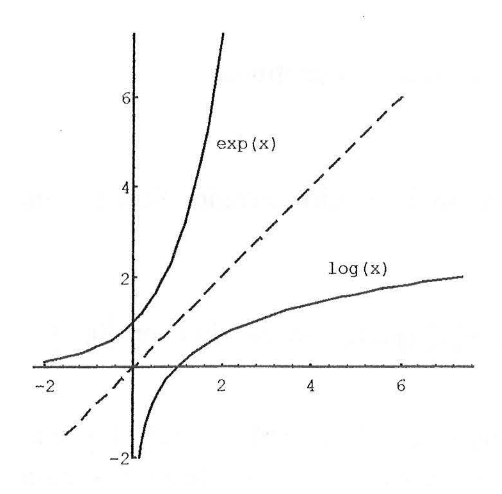
Funciones monótonas

Decimos que una función $f: I\to\mathbb{R}$ es monótona creciente [resp. decreciente] si para todo par x_0, x_1 de puntos de *I* es $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\ge 0$ [resp. ≤ 0]. Y si esta desigualdad es estricta diremos que la función es estrictamente monótona, creciente o decreciente.

Si una función *f* es estrictamente monótona en *I*, es evidentemente inyectiva, es decir, biyectiva de *I* sobre $f(I)$, y existe la función recíproca f^{-1}, que es una biyección de $f(I)$ sobre *I*, o simplemente una función inyectiva $f^{-1}: f(I)\to\mathbb{R}$. Y dados dos puntos de $f(I)$, $y_0=f(x_0)$ e $y_1=f(x_1)$, será $\dfrac{f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_0)}{y_1-y_0}=\dfrac{x_1-x_0}{f(x_1)-f(x_0)}$, expresión ésta del segundo miembro que es >0 si *f* es creciente [resp. <0 si *f* es decreciente]; luego f^{-1} será también estrictamente monótona y en el mismo sentido.

Ejemplo

Las funciones exponencial y logarítmica son recíprocas una de otra, puesto que $log\,e^x=x$ (ó $e^{log\,x}=x$); ambas son estrictamente crecientes, la una de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}_+^*$, la



otra de $\mathbb{R}_+^*$ sobre $\mathbb{R}$. En sus gráficas, para cada punto (x,e^x) de la primera existe un (e^x,x) de la segunda, simétricos respecto del eje $y=x$. Simetría que se verifica, pues, para las gráficas en su totalidad (ver figura); esta propiedad se extiende, naturalmente, a todos los pares de funciones recíprocas (f,f^{-1}).

Monotonía y continuidad: homeomorfismo

Teorema. Si una función f es estrictamente monótona en I y continua, entonces su recíproca f^{-1} es también continua en el *intervalo* $f(I)$; a tales funciones *f* (y f^{-1}) se las llama *homeomorfismos*. Se habla también en este caso de *bicontinuidad*.

También se demuestra el siguiente *Teorema.* Si *f* es continua e inyectiva en *I*, entonces es estrictamente monótona en *I*.

Extensiones del concepto de límite

Definición. Decimos que una función *f* definida en un intervalo no acotado $I=[a,\infty)$ tiene límite $l\in\mathbb{R}$ cuando *x* tiende a infinito, $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$, si y sólo si para todo $\varepsilon>0$ existe un $k\in\mathbb{R}$ tal que $x>k\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$. Análogamente, si $I=(-\infty,b]$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$ si y sólo si para todo $\varepsilon>0$ existe un $k\in\mathbb{R}$ tal que $x<k\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$.

Definición. Decimos que una función *f* definida en *I* tiene límite infinito [resp. menos infinito] en $x_0\in\overline{I}$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ [resp. $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$], si y sólo si para todo $k\in\mathbb{R}$ existe un $\delta>0$ tal que $0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow f(x)>k$ [resp. $f(x)<k$].

Naturalmente, ambas circunstancias pueden darse a la vez:

Definición. Decimos que una función *f* definida en un intervalo no acotado $I=[a,\infty)$ tiene límite infinito cuando *x* tiende a infinito, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, si y sólo si para todo $k_1\in\mathbb{R}$ existe un $k_2\in\mathbb{R}$ tal que $x>k_2\Rightarrow f(x)>k_1$. Y análogamente si alguno o ambos infinitos son negativos.

Operaciones con límites infinitos o nulos. Indeterminaciones

Teorema. Sean *f* y *g* definidas en I, $x_0\in I$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ y *g* inferiormente acotada en un entorno de x_0 (lo que incluye como caso particular que *g* tenga en ese punto límite

finito o $+\infty$); entonces $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\infty$. Lo mismo si los límites fueran en ∞ o en $-\infty$. Y si fuera $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ y g estuviera superiormente acotada, tendríamos naturalmente $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=-\infty$. Omitiremos la demostración, tan sencilla como ya repetitiva y farragosa.

¿Y qué ocurre si $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)=-\infty$? No hay entonces regla general para el límite de la suma, como expresan los siguientes

Ejemplos

1. $f(x)=x^3$, $g(x)=-x^2$, $\lim_{x\to\infty}(f+g)(x)=\infty$; *2.* $f(x)=x$, $g(x)=-x^2+3$, $\lim_{x\to\infty}(f+g)(x)=-\infty$; *3.* $f(x)=x$, $g(x)=-x+sen\,x$, no existe $\lim_{x\to\infty}(f+g)(x)$.

Nos encontramos aquí con lo que se llama un caso de *indeterminación*, concretamente el llamado $\infty-\infty$. Es éste un concepto que conviene entender bien, teniendo claro que la indeterminación es una propiedad pudiéramos decir colectiva, es decir, relativa al conjunto de todas las funciones obtenidas como suma de una de límite ∞ en un punto y otra de límite $-\infty$ en ese mismo punto. Si de una función sólo sabemos que pertenece a ese conjunto, no sabemos nada acerca de su posible límite, porque no hay regla general, pero una vez que tenemos delante una función concreta de ese conjunto, la pregunta de si tiene límite en ese punto y cuál sea éste tiene una respuesta perfectamente determinada, como hemos visto en los tres ejemplos (otra cosa es el método que usemos para calcularlo y la mayor o menor dificultad de la empresa).

A partir de aquí, y para evitar la pesadez, emplearemos un lenguaje más telegráfico.

Producto. Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ [resp. $-\infty$] y g inferiormente acotada por $k>0$, entonces $\lim_{x\to x_0} f\cdot g(x)=\infty$ [resp. $-\infty$]; y si g superiormente acotada por $k<0$, entonces $\lim_{x\to x_0} f\cdot g(x)=-\infty$ [resp. ∞]; apareciendo aquí también una *indeterminación:* $\infty\cdot 0$.

Ejemplos

1. $f(x)=x^3$, $g(x)=\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\infty}(f.g)(x)=\infty$; *2.* $f(x)=\frac{-3}{sen\,x^2}$, $g(x)=x^2$, $\lim_{x\to 0}(f.g)(x)=-3$, etc.

Cociente. Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ [resp. $-\infty$] y g inferiormente acotada por $k>0$, entonces $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ [resp. $-\infty$]; y si g superiormente acotada por $k<0$, los signos se

invierten como en el producto; *indeterminación:* $\frac{\infty}{\infty}$; si $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ y $\lim_{x\to x_0} \neq 0$, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$; *indeterminación:* $\frac{0}{0}$.

Potencias. Lo resumiremos con un cuadro: $0^l = \begin{cases} 0 & \text{si } l>0 \\ \infty & \text{si } l<0 \end{cases}$, $\infty^l = \begin{cases} \infty & \text{si } l>0 \\ 0 & \text{si } l<0 \end{cases}$, $l^\infty = \begin{cases} \infty & \text{si } l>1 \\ 0 & \text{si } l<1 \end{cases}$, $l^{-\infty} = \begin{cases} 0 & \text{si } l>1 \\ \infty & \text{si } l<1 \end{cases}$ (hay que entender que 0^l, por ejemplo, representa f^g, donde *f* tiene límite 0 y *g* límite *l*, etc.); *indeterminaciones:* 0^0, ∞^0 e 1^∞.

Ejemplos caso ∞^0. *1.* $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = 1$ (lo veremos muy pronto); *2.* $f(x)=x^x$, $g(x)=\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$; etc.

El número e

La función $f:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (que resulta ser creciente y superiormente acotada: 3 es, por ejemplo, una cota superior) presenta, para $x\to\infty$, una indeterminación del tipo 1^∞. Pues bien, se demuestra el siguiente

Teorema. $\exists \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \in \mathbb{R}$. A este número lo llamamos *e*, y es una constante de gran importancia para el Cálculo. Su expresión numérica empieza $e = 2,7182818284...$

Infinitésimos e infinitos. Orden. Equivalencia

LLamaremos infinitésimo [resp. infinito] en un punto a una función que tenga límite 0 [resp. ∞ ó $-\infty$] en él.

Definición. Dados dos infinitésimos [resp. infinitos] en $x = x_0$, *f* y *g*, diremos que *f* es *de mayor orden* que *g* si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ [resp. $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$], que son *del mismo orden* si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}^*$ y que son *equivalentes,* $f \sim g$, si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Ejemplos

1. Sabemos que $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$, es decir, $x \sim sen\, x$ para $x \to 0$; pero $\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x}{x} = = \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen}{x}\frac{1}{cos\, x}\right) = 1$, luego también $x \sim tg\, x$; y si es $y = arcsen\, x$, como $x \to 0 \Leftrightarrow$

$y \to 0$ por continuidad, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arcsen\, x}{x} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{sen\, y} = 1$: también $x \sim arcsen\, x$, y lo mismo para $arctg\, x$; en resumen

$$\text{para } x \to 0,\ x \sim sen\, x \sim tg\, x \sim arcsen\, x \sim arctg\, x.$$

Naturalmente, si sustituimos *x* por una función $f(x)$ que tenga límite 0 en un punto x_0, el resultado sigue siendo válido:

$$\text{si } \lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \text{ entonces,}$$

$$\text{para } x \to x_0,\ f(x) \sim sen\, f(x) \sim tg\, f(x) \sim arcsen\, f(x) \sim arctg\, f(x).$$

Esta observación sobre la sustitución de *x* por $f(x)$ puede aplicarse a todo lo que sigue.

2. $cos\, x = 1 - 2 sen^2 \frac{x}{2}$, o bien $1 - cos\, x = 2 sen^2 \frac{x}{2}$, y esto último es equivalente, para $x \to 0$, a $2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$; es decir,

$$\text{para } x \to 0,\ 1 - cos\, x \sim \frac{x^2}{2}.$$

3. De $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$, haciendo $\frac{1}{y} = x$ resulta $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, y tomando logaritmos, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{log(1+x)}{x} = 1$, es decir,

$$\text{para } x \to 0,\ log(1+x) \sim x;$$

lo que equivale, tomando como variable $t = 1 + x$ con $x \to 0$, a

$$\text{para } t \to 1,\ log\, t \sim t - 1.$$

De aquí, por ejemplo, si es $t = e^x$,

$$\text{para } x \to 0,\ e^x - 1 \sim x;$$

y si $t = (1+x)^\alpha$, $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha\, log(1+x) \sim \alpha x$:

$$\text{para } x \to 0,\ (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

4. Dado el polinomio $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$, su límite para $x \to \infty$ es $\lim\limits_{x\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a_0}{a_n x^n} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + 1\right) a_n x^n = \pm\infty$ (con el signo de a_n); y se

verifica que $\lim_{x\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}a_kx^k}{a_nx^n}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_0}{x^n}+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x}+a_n\right)=1$: es decir, $\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\sim a_nx^n$ para $x\to\infty$, y lo mismo para $x\to-\infty$: cuando $x\to\pm\infty$ un polinomio es un infinito equivalente a su término principal a_nx^n.

5. En cuanto al orden, es trivial que sen^2x es de mayor orden que x para $x\to 0$, que un polinomio de grado $m>n$ es de mayor orden que otro de grado n si $x\to\infty$, etc.

La importancia de estos conceptos viene de las siguientes propiedades.

Teorema. La suma de dos infinitos [resp. infinitésimos] de distinto orden es equivalente al de *mayor* [resp. *menor*] orden.

Demostración. Si $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$ es $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+g(x)}{f(x)}=1$, ó $f(x)+g(x)\sim f(x)$. ■

Por eso se dice a veces que en una suma el infinitésimo de mayor orden, o el infinito de menor orden, son *despreciables*.

Teorema. Si f y g, ambos infinitos o infinitésimos, son equivalentes en x_0, y h es una función cualquiera, entonces $\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot h(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)\cdot h(x)$, supuesto que ambos límites existan.

Demostración. $\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot h(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}\cdot f(x)\cdot h(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)\cdot h(x)$. ■

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+2x^3-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^4}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\left(1+\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^4}\right)\right)^{\frac{1}{4}}-1\right)\overset{(*)}{=}$$

$=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^4}\right)=\frac{1}{2}$, habiendo utilizado en $^{(*)}$ la equivalencia $(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$, tomando el infinitésimo $\frac{2}{x}-\frac{1}{x^4}$ en lugar de x.

II – Derivadas y diferenciales

Derivada de una función en un punto

Definición. Sea $f : I \to \mathbb{R}$, siendo *I* un intervalo, y $x_0 \in I$; se dice que *f* es *derivable*, o *diferenciable*, en x_0 si y sólo si la función $h \mapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, definida en un entorno de $h = 0$, tiene límite finito en dicho punto:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \in \mathbb{R};$$

a este número real $f'(x_0)$ lo llamamos entonces *derivada de f en* x_0.

Ejemplo

Sean $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$; $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^3-1^3}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1^3+3\cdot 1^2 h+3\cdot 1h^2+h^3-1^3}{h} =$
$= \lim\limits_{h\to 0}\left(3+3h+h^2\right) = 3$.

Diferencial de una función en un punto

Sea *f* derivable en x_0. Por definición se verifica, según acabamos de ver, que

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-h\cdot f'(x_0)}{h} = 0,$$

es decir, la diferencia $(f(x_0+h)-f(x_0))-h\cdot f'(x_0)$ es un infinitésimo de orden superior a *h*, sentido en el que decimos que la *aplicación lineal de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$

$$h \mapsto h\cdot f'(x_0)$$

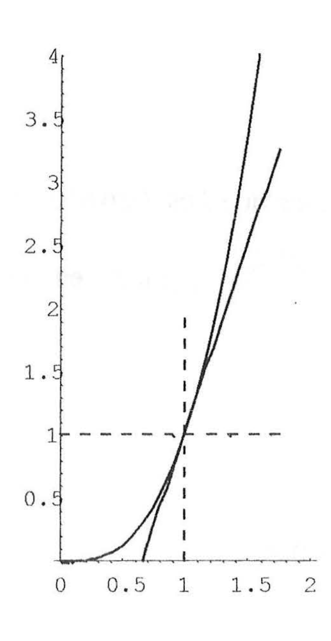
es una *buena aproximación lineal* de *f*. La derivabilidad de *f* equivale, pues, a la existencia de esta *buena* aproximación lineal.

Definición. Dada una función *f* derivable en un punto x_0, a la aplicación lineal $h \mapsto h\cdot f'(x_0)$ se la llama *diferencial* de *f*, *df*, en x_0.

Notación. Es habitual llamar *dx* a *h* y *dy* a *df*(*h*), con lo que tenemos

$$dy = f'(x_0) \cdot dx .$$

Ejemplo



Sean otra vez $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$; $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = 3$ equivale a $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\left((1+h)^3 - 1^3\right) - 3h}{h} = 0$, y la aplicación lineal $h \mapsto 3h$, o $dy = 3dx$, es la que mejor aproxima la función $x \mapsto x^3$ en un entorno del punto $x = 1$.

Interpretación geométrica. La diferencial, como aplicación lineal, es la ecuación de una recta que *aproxima* localmente la curva y que *por definición* es la ***tangente*** a la gráfica de *f* en x_0. La diferenciabilidad en un punto equivale, pues, a la existencia de tangente a la gráfica en dicho punto. Así, en el ejemplo, la *recta* $dy = 3dx$, en unos ejes dx y dy de origen el punto $(1,1)$ (señalados con puntos), es la tangente a la *curva* $y = x^3$ en dicho punto.

Para referir la ecuación de la tangente a los ejes habituales bastará sustituir dx por $x - x_0$ y dy por $y - f(x_0)$. En el ejemplo que acabamos de ver, la tangente a la curva en el punto $(1,1)$ será la recta $y - 1 = 3(x-1)$, o bien $y = 3x - 2$.

Diferenciabilidad y continuidad

Teorema. Si una función es derivable (diferenciable) en un punto, entonces es continua en él.

Demostración. Llamando

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - h \cdot f'(x_0)}{h}$$

(con lo que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$), puede escribirse

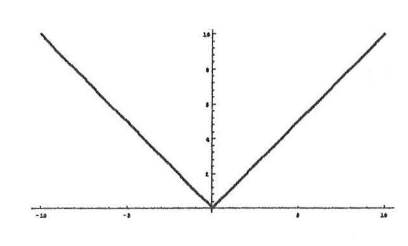
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + h \cdot \varepsilon(h),$$

y tomando límites,

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0),$$

es decir, *f* es continua en x_0. ■

El recíproco no es cierto, como muestra por ejemplo la función $f(x)=|x|$, continua y no derivable en $x=0$; en efecto, para un $x_0>0$ es $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=$



$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x_0+h-x_0}{h}=1$, y para $x_0<0$, $f'(x_0)=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-(x_0+h)-(-x_0)}{h}=-1$; pero para $x_0=0$,

$\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h}$, que no tiene límite para $h\to 0$; *f* es derivable sólo en $\mathbb{R}^*$.

Esto último merece mayor comentario. Dada una función *f* definida en un entorno de x_0, decimos que tiene límite *l* (*semilímite* sería más correcto) *a la derecha* en x_0 si $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: 0<x-x_0<\delta\to|f(x)-l|<\varepsilon$ (es decir, considerando en la definición sólo valores de *x* *mayores* que x_0), expresándolo así: $\lim\limits_{h\to x_0+}f(x)=l$; y análogamente *a la izquierda*, sin más que escribir $\lim\limits_{h\to x_0-}f(x)$ y x_0-x en lugar de $\lim\limits_{h\to x_0+}f(x)$ y $x-x_0$. Este concepto se aplica también a la derivada; en el último ejemplo, $x\mapsto|x|$, es evidente que $\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{|h|}{h}=1$ y $\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{|h|}{h}=-1$, lo que expresamos diciendo que la función tiene en $x=0$ derivada [*semiderivada*] *a la derecha* igual a 1 y *a la izquierda* igual a -1. Y lo mismo para la continuidad, hablándose de *(semi)continuidad* a la derecha y a la izquierda. Por ejemplo, la función $x\mapsto[x]$ (parte entera de *x*) es continua y derivable en todo real no entero, y al ser $\lim\limits_{x\to n+}f(x)=n=$ $=f(n)$, $\lim\limits_{x\to n-}f(x)=n-1$ para todo $n\in\mathbb{Z}$, es continua y derivable a la derecha ($f'(n+)=0$) en todo real entero.

Diferenciabilidad en un intervalo. Función derivada

Definición. Se dice que una función $f: I\to\mathbb{R}$ es derivable (diferenciable) en *I* si lo es en todos los puntos de *I*.

A la función $x\mapsto f'(x)$ se la llama entonces *función derivada* de *f*.

Ejemplo 1

Sea $f(x)=x^3$; para todo $x\in\mathbb{R}$ tenemos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right)=3x^2,$$

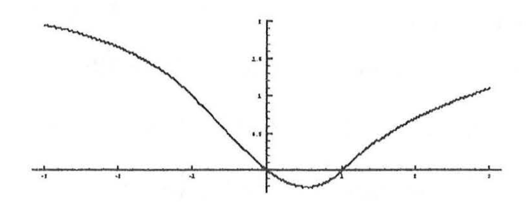
luego *f* es derivable en $\mathbb{R}$, y la función derivada es

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f'(x) = 3x^2.$$

Ejemplo 2

Supongamos que definimos la función f mediante la expresión

$$f(x) = \begin{cases} e^{1+\frac{1}{x}} \ (\text{si } x < -1) \\ ax^3 + bx^2 + cx + d \ (\text{si } -1 \le x \le 1), \\ \log x \ (\text{si } 1 < x) \end{cases}$$



con la condición de que sea continua y derivable en $\mathbb{R}$; ¿qué valor habrá que darles a los coeficientes *a*, *b*, *c* y *d*? Desde luego, f será continua y derivable para todo x distinto de 1 y de -1; y en estos puntos habrá de ser:

$f(1) = a + b + c + d = \lim_{x\to 1} f(x) = 0$, $f(-1) = -a + b - c + d = \lim_{x\to -1} f(x) = 1$,
$f'(1) = 3a + 2b + c = f'(1+) = 1$, $f'(-1) = 3a - 2b + c = f'(-1-) = -1$

(valores estos últimos de $\frac{1}{x}$ para $x = 1$ y de $-\frac{1}{x^2}e^{1+\frac{1}{x}}$ para $x = -1$), sistema lineal de ecuaciones que da $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{3}{4}$ y $d = 0$.

La figura muestra la gráfica de la función en el intervalo $[-3,3]$.

Operaciones con funciones diferenciables

Teorema. Si f y g son dos funciones diferenciables en un intervalo I, la función suma y la función producto lo son también, siendo $(f+g)' = f' + g'$, $(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$.

Demostración. La haremos para el producto. Sea x_0 un punto genérico de I; por hipótesis existen $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ y $\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = g'(x_0)$; luego $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\cdot(g(x_0+h) - g(x_0))}{h} +$
$+\lim_{h\to 0} \frac{(f(x_0+h) - f(x_0))\cdot g(x_0)}{h} = f(x_0)\cdot g'(x_0) + f'(x_0)\cdot g(x_0)$, es decir,
$(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0)\cdot g'(x_0) + f'(x_0)\cdot g(x_0)$; y lo mismo en todos los puntos de I. ■

Teorema. Si f es una función diferenciable en un intervalo I y $0 \notin f(I)$, entonces la función $\frac{1}{f}$ es diferenciable en I y $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.

Demostración. $\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{h} \cdot \frac{1}{f(x_0+h)\cdot f(x_0)} =$

$= -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$, y ello en todos los puntos de I. ■

Consecuencia. De lo anterior y de lo visto para el producto resulta, con la condición sabida de no anulación de g, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f \cdot \frac{-g'}{g^2} + f' \cdot \frac{1}{g} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

Composición de funciones diferenciables

Teorema. Sean f y g dos funciones diferenciables, respectivamente en los intervalos I y J, con $f(I) \subset J$; entonces la función $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ es diferenciable, y su derivada es $(g \circ f)' = g' \circ f \cdot f'$.

Demostración. Sea $x_0 \in I$ y h variando en un entorno de 0 tal que $x_0 + h \in I$; llamemos $f(x_0) = y_0$ y $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$; por la diferenciabilidad de g será

$$g(y_0 + k) - g(y_0) = k(g'(y_0) + \varepsilon_1(k)), \text{ con } \lim_{k\to 0} \varepsilon_1(k) = 0;$$

y por la diferenciabilidad de f,

$$k = f(x_0 + h) - f(x_0) = h(f'(x_0) + \varepsilon_2(h)), \text{ con } \lim_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = 0;$$

de donde, combinando ambas expresiones y recordando el significado de $g \circ f$,

$$g \circ f(x_0 + h) - g \circ f(x_0) = h(f'(x_0) + \varepsilon_2(h))(g' \circ f(x_0) + \varepsilon_1(k)) =$$

$$= h(g' \circ f(x_0) \cdot f'(x_0) + \varepsilon(h)),$$

donde $\varepsilon(h) = \varepsilon_2(h) \cdot g' \circ f(x_0) + \varepsilon_1(k) \cdot f'(x_0) + \varepsilon_2(h) \cdot \varepsilon_1(k)$; y como $h \to 0 \Rightarrow k \to 0$ por la continuidad de f, es $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$; luego $g \circ f$ es diferenciable en x_0 y $(g \circ f)'(x_0) = g' \circ f(x_0) \cdot f'(x_0)$; y lo mismo para cualquier otro punto de I.

Teoremas de Rolle, Lagrange y Cauchy

Teorema (Rolle). Sea f continua en $I = [a, b]$, derivable en $\mathring{I}$ y tal que $f(a) = f(b)$; existe entonces un punto $c \in \mathring{I}$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración. Puesto que f es continua e I cerrado, según el teorema de Weierstrass f tiene en I un valor máximo y un valor mínimo, M y m respectivamente, con $m \le M$. Hay tres posibilidades: 1) $m = M$, 2) $m < M > f(a)$ y 3) $m < M = f(a)$; 1) si $m = M$, f es constante y su derivada se anula en todos los puntos (razónese); 2) al ser $M \ne f(a) = f(b)$, M es el valor de f en un punto distinto de a y de b, digamos $c \in \overset{\circ}{I}$, en el que, en virtud de las hipótesis del teorema, existe la derivada, $f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$; pero al ser $f(c) = M$ resulta $f(c+h) - f(c) \le 0$ cualquiera que sea h, con lo que si $h < 0$ es $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \ge 0$ y ha de ser $f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \ge 0$, y si $h > 0$ es $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \le 0$ y ha de ser $f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \le 0$; luego $f'(c) = 0$; 3) al ser $m < f(a)$, m es el valor de f en un punto distinto de a y de b, $c \in \overset{\circ}{I}$, en el que existe la derivada, etc.; el razonamiento sigue de forma análoga (escríbase completo). ■

Teorema (Lagrange). Sea f continua en $I = [a,b]$ y derivable en $\overset{\circ}{I}$; existe entonces un punto $c \in \overset{\circ}{I}$ tal que

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c):$$

es la llamada *fórmula de los incrementos finitos.*

Demostración. Sea $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = (f(b) - f(a))x - (b-a) f(x)$; evidentemente, φ es continua en I y derivable en $\overset{\circ}{I}$, lo mismo que f, y además

$$\varphi(a) = (f(b) - f(a))a - (b-a) f(a) = af(b) - bf(a),$$
$$\varphi(b) = (f(b) - f(a))b - (b-a) f(b) = af(b) - bf(a),$$

es decir, $\varphi(a) = \varphi(b)$, y φ verifica las hipótesis del teorema de Rolle, luego existe un $c \in \overset{\circ}{I}$ tal que $\varphi'(c) = 0$; pero $\varphi'(x) = (f(b) - f(a)) - (b-a) f'(x)$, es decir, lo que se verifica es que $\varphi'(c) = (f(b) - f(a)) - (b-a) f'(c) = 0$, que es la tesis del teorema. ■

Teorema (Cauchy). Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo cerrado I y derivables en el interior del mismo, $\overset{\circ}{I}$; existe entonces un punto $c \in \overset{\circ}{I}$ tal que

$$(f(b) - f(a)) g'(c) - (g(b) - g(a)) f'(c) = 0:$$

es la *fórmula generalizada de los incrementos finitos.*

Demostración. Análoga a la del teorema anterior, aplicando ahora el teorema de Rolle a la función $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \big(f(b) - f(a)\big)g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)f(x)$. ■

Variación de una función diferenciable

Teorema. Sea *f* derivable en I;

f es constante si y sólo si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$,
f es creciente si y sólo si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$ [estrictamente si $f'(x) > 0$],
f es decreciente si y sólo si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$ [estrict. si $f'(x) < 0$].

Demostración. La fórmula de los incrementos finitos puede escribirse, para $x_0 \neq x_1$, así: $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(c)$, con *c* entre x_0 y x_1; y recordando la condición de monotonía resulta el teorema. ■

Regla de l'Hôpital

Teorema. Sean f y g dos funciones continuas en un entorno V de un punto x_0, derivables en $V - \{x_0\}$, con $f(x_0) = g(x_0) = 0$ y $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ en $V - \{x_0\}$; si existe $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito o no), entonces existe $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración. Por ser $f(x_0) = g(x_0) = 0$, es

$$\frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{g(x_0 + h) - g(x_0)},$$

y según la fórmula generalizada de los incrementos finitos, escribiendo x_0, $x_0 + h$ y $x_0 + \theta h$ en lugar de *a*, *b* y *c*,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{g(x_0 + h) - g(x_0)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{g'(x_0 + \theta h)},$$

de donde tomando límites,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + \theta h)}{g'(x_0 + \theta h)}, \text{ es decir, } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \ ■$$

Se demuestra que el teorema se verifica también: a) si se trata de límites en el infinito; b) si no es $f(x_0) = g(x_0) = 0$, sino $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$; c) si es a) y b) a la vez.

La regla de l'Hôpital tiene el siguiente interesante corolario.

Teorema. Sea f una función continua en un intervalo I y derivable en $I-\{a\}$, con $a \in I$, y tal que existe $\lim_{x\to a} f'(x) = l \in \mathbb{R}$; entonces f es derivable en $x=a$ y $f'(a)=l$.

Demostración. Basta aplicar la regla de l'Hôpital al cálculo de la derivada:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(a+h) = l. \ \blacksquare$$

El recíproco es falso; puede no existir $\lim_{x\to a} f'(x)$ y sí $f'(a)$. Por ejemplo, la función definida en $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x) = x^2\, sen\dfrac{1}{x} \\ f(0)=0 \end{cases}$$

tiene como derivada, para $x \neq 0$, $f'(x) = 2x\, sen\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}$, que no tiene límite en $x=0$, y sin embargo existe $f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\, sen\frac{1}{h} = 0$ (es decir, sólo si *no tiene límite finito* es f' discontinua).

Homeomorfismo diferenciable. Teorema de la función recíproca

Teorema. Sea f una función con derivada continua (o dicho de otro modo como veremos muy pronto, de clase C^1) en un entorno V de un punto x_0, y tal que $f'(x_0) \neq 0$; entonces existe en un entorno U de $y_0 = f(x_0)$ la función recíproca f^{-1}, con derivada continua y tal que

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Demostración. Si f' es continua y $f'(x_0) \neq 0$, f' no se anula en un entorno de x_0 y, según lo que acabamos de ver, f es monótona y existe f^{-1}. De

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0), \text{ o bien } \lim_{h\to 0}\frac{h}{f(x_0+h)-f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

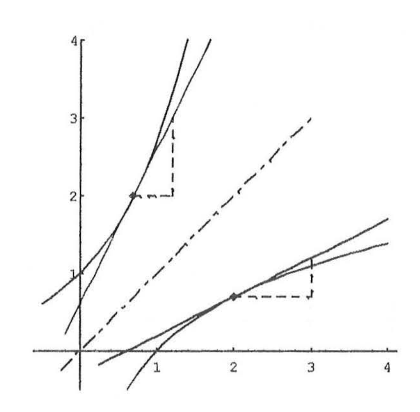
llamando $f(x_0+h) = y_0 + k$, con lo que $x_0 + h = f^{-1}(y_0+k)$, y teniendo en cuenta que $h \to 0 \Leftrightarrow k \to 0$ por la *bicontinuidad*, resulta

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{k\to 0}\frac{f^{-1}(y_0+k)-f^{-1}(y_0)}{k} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \ \blacksquare$$

Naturalmente, cabe una versión *global* de este teorema que hemos visto en forma *local*; es decir, si f es de clase C^1 en un intervalo I y su derivada no se anula (es decir, f es un homeomorfismo diferenciable, o *difeomorfismo*), entonces f^{-1} está definida y es de clase C^1 en el intervalo $f(I)$ y su derivada es

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Observación. Que sea $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, es decir, que las derivadas de funciones *recíprocas* sean *inversas* una de otra, resulta natural recordando que sus gráficas son simétricas respecto de la bisectriz $y = x$, con lo que las tangentes en los respectivos puntos (x_0, y_0) e (y_0, x_0) serán también simétricas, los ángulos que forman con el eje OX complementarios y las tangentes trigonométricas de éstos (las derivadas) inversas una de otra. En la figura se ven de nuevo las gráficas de la exponencial y el logaritmo, con sus tangentes en los puntos simétricos $(log\,2, 2)$ y $(2, log\,2)$.



Derivación de las funciones elementales. Función potencial

De las propiedades y los ejemplos vistos se deduce sin dificultad cuál es la derivada de una función racional.

En el caso de una función potencial no entera, $f(x) = x^\alpha$ $(x > 0)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, será:

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = x^\alpha \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{h} = x^\alpha \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\alpha \dfrac{h}{x}}{h} = \alpha x^{\alpha-1}$, donde se ha hecho uso de una equivalencia ya conocida; es decir, la derivada tiene la misma forma que la de una potencia de exponente entero.

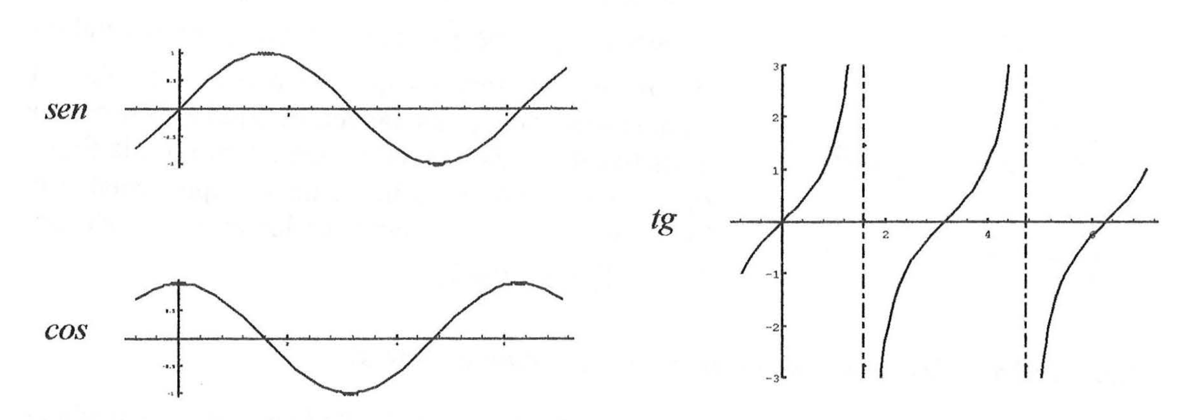
Funciones exponencial y logarítmica

Para $f(x) = e^x$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = e^x$; y para $g(x) = log\,x = f^{-1}(x)$ será, como función recíproca, $g'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \dfrac{1}{e^{log\,x}} = \dfrac{1}{x}$.

Funciones trigonométricas y sus recíprocas

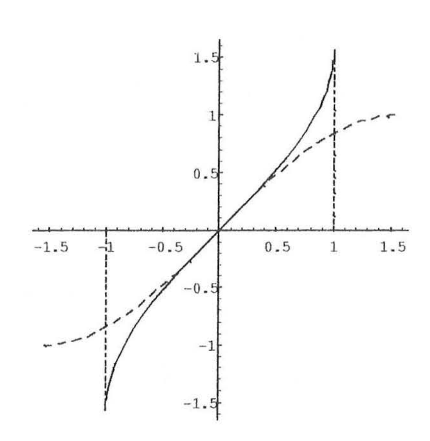
De las conocidas definiciones geométricas elementales de las funciones *sen*, *cos* y *tg* se deriva de forma inmediata la relación fundamental, $sen^2 x + cos^2 x = 1$, y de ella la

identidad $\dfrac{1}{cos^2 x}=\dfrac{sen^2 x+cos^2 x}{cos^2 x}=1+tg^2 x$, o bien $cos\,x=\dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+tg^2 x}}$; y asimismo las propiedades básicas de dichas funciones, como la periodicidad de todas ellas, la acotación del seno y el coseno, la imparidad del seno [$sen(-x)=-sen\,x$], la paridad del coseno [$cos(-x)=cos\,x$] con la subsiguiente imparidad de la tangente [$tg(-x)=$ $=\dfrac{sen(-x)}{cos(-x)}=\dfrac{-sen\,x}{cos\,x}=-tg\,x$]; las expresiones $sen(x+y)=sen\,x\,cos\,y+cos\,x\,sen\,y$, $cos(x+y)=cos\,x\,cos\,y-sen\,x\,sen\,y$, $tg(x+y)=\dfrac{tg\,x+tg\,y}{1+tg\,x\,tg\,y}$ y las de ellas obtenidas para los arcos múltiplos y los divisores. Propiedades algunas de las cuales se expresan muy bien en las gráficas:



El seno y el coseno son funciones continuas y derivables en $\mathbb{R}$; en efecto, de la identidad $sen\,a-sen\,b=2cos\dfrac{a+b}{2}sen\dfrac{a-b}{2}$ (fácil de deducir a partir de la expresión $sen(x+y)-sen(x-y)$) resulta: $sen'\,x=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{sen(x+h)-sen\,x}{h}=$ $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2}{h}\left(cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)sen\dfrac{h}{2}\right)=cos\,x$; y de $cos\,x=sen\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, derivando ésta como función compuesta, $cos'\,x=-cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=-sen\,x$; la tangente es continua y derivable en los puntos en los que no se anula el coseno, es decir, en $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$, resultando, al derivar $tg\,x=\dfrac{sen\,x}{cos\,x}$, $tg'\,x=\dfrac{1}{cos^2 x}=1+tg^2 x$.

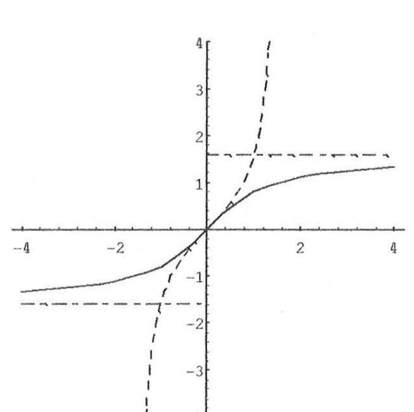
De todo ello se desprende lo siguiente. El seno es una función continua cuya *restricción* al intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ es *creciente* y derivable, siendo su derivada no nula en el interior del intervalo, $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, luego *existe* su función recíproca sen^{-1} a la que llamamos *arcsen* [arcoseno], que será una función continua definida en el intervalo $[-1,1]=$



$= \left[sen\left(-\frac{\pi}{2}\right), sen\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$, creciente y derivable en el interior del mismo, $(-1,1)$, siendo su derivada $arcsen' x = \frac{1}{sen'(arcsen\, x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Su gráfica será simétrica de la del seno respecto de la bisectriz del primer cuadrante, como se ve en la figura.

Análogamente, la restricción del coseno al intervalo $[0,\pi]$ es monótona decreciente y existe la función recíproca, *arccos*; pero, por las propiedades básicas del seno y el coseno, si $y = arccos\, x$ es $x = cos\, y = sen\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$, es decir, $\frac{\pi}{2} - y = arc\, sen\, x$ o bien $y = arc\, cos\, x = \frac{\pi}{2} - arc\, sen\, x$, con lo cual esta función se reduce a la anterior.

La tangente, restringida al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, es una función monótona creciente,

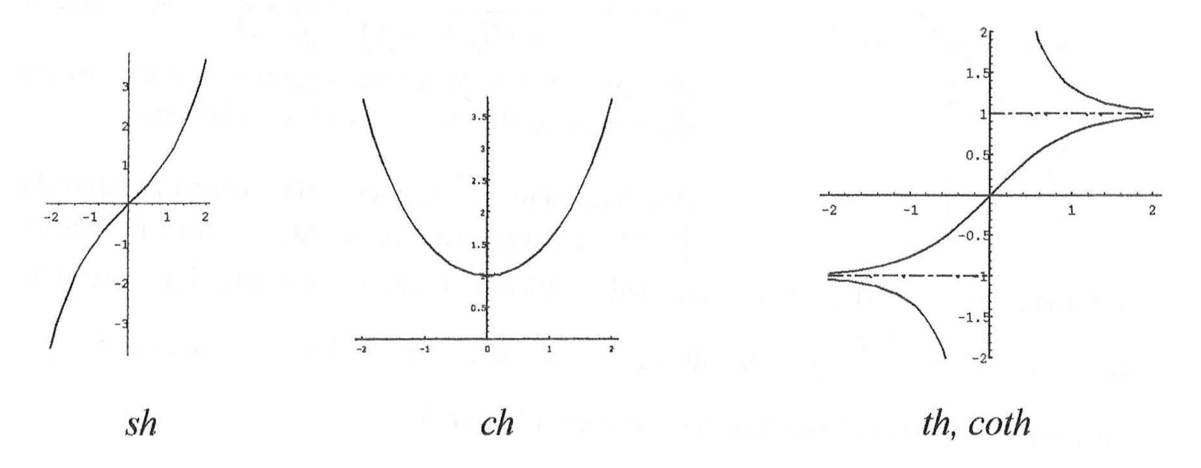


continua y derivable, con derivada no nula en todos los puntos y con $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}+} tg\, x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} tg\, x = \infty$, es decir, es una biyección de $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sobre $\mathbb{R}$, luego existe la función recíproca [arcotangente] $arctg : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, biyección monótona creciente, continua y derivable, siendo $arctg' x = \frac{1}{tg'(arctg\, x)} = \frac{1}{1+x^2}$.

Funciones hiperbólicas y sus recíprocas

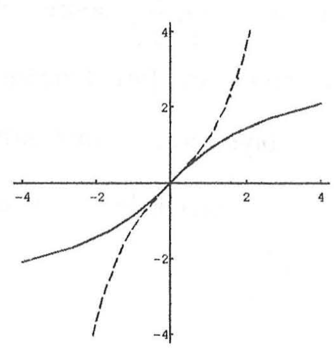
Las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ *sh, ch* y *th*, o bien *senh, cosh* y *tanh* [seno, coseno y tangente hiperbólicos] se definen así: $sh\, x = \frac{e^x - e^x}{2}$, $ch\, x = \frac{e^x + e^x}{2}$, $th\, x = \frac{sh\, x}{ch\, x}$; y la de $\mathbb{R}^*$ en $\mathbb{R}$, *coth* [cotangente hiperbólica], así: $coth\, x = \frac{1}{th\, x}$; y tienen un paralelismo grande con las funciones trigonométricas. La relación fundamental es ahora $ch^2 x - sh^2 x = 1$, de donde $\frac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2 x$ o bien $ch\, x = \frac{1}{\sqrt{1-th^2 x}}$ (siempre positivo). Las funciones *sh, th* y *coth* son impares y la *ch* par. Se verifica que $sh(x+y) = sh\, x\, ch\, y + ch\, x\, sh\, y$, $ch(x+y) = ch\, x\, ch\, y + sh\, x\, sh\, y$, $th(x+y) = \frac{th\, x + th\, y}{1 + th\, x\, th\, y}$, como se comprueba aplicando

las definiciones, lo mismo que $\lim\limits_{x\to\infty} shx = \lim\limits_{x\to\infty} chx = \infty$ [y $\lim\limits_{x\to-\infty} shx = -\lim\limits_{x\to-\infty} chx = -\infty$], y $\lim\limits_{x\to\infty} thx = \lim\limits_{x\to\infty} cothx = 1$ [$\lim\limits_{x\to-\infty} thx = \lim\limits_{x\to-\infty} cothx = -1$], $\lim\limits_{x\to 0+} cothx = \infty$ [$\lim\limits_{x\to 0-} cothx = -\infty$]. Las gráficas de todas ellas son, esquemáticamente:



sh *ch* *th, coth*

(en la última figura, la curva entre las rectas $y=-1$ e $y=1$ es la gráfica de *th*, el resto la de *coth*). Todas son continuas y derivables en $\mathbb{R}$, con $sh'x = chx$, $ch'x = shx$, $th'x = \dfrac{1}{ch^2x} = 1 - th^2x$, $coth'x = \dfrac{sh^2x - ch^2x}{sh^2x} = -\dfrac{1}{sh^2x} = 1 - coth^2 x$. La función coseno es siempre positiva, como hemos dicho, teniendo su valor mínimo en $x=0$: $ch0 = 1$.

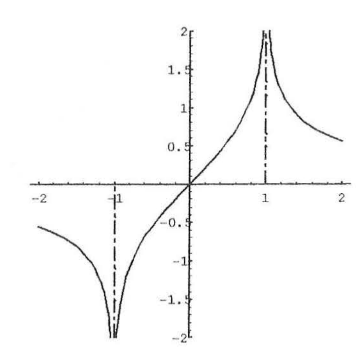


El seno hiperbólico es una biyección creciente de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$; su función recíproca, *argsh* [argumento seno hiperbólico], lo será también, siendo su derivada

$$arg\,sh'x = \frac{1}{ch(arg\,shx)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

El coseno hiperbólico es creciente para $x \in [0,\infty)$; su restricción a este conjunto, con derivada nula sólo en $x=0$, tendrá una recíproca, *argch* [argumento coseno hiperbólico], creciente y derivable para $x>1$; su derivada será $arg\,ch'x = \dfrac{1}{sh(arg\,chx)} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

La tangente hiperbólica es una biyección creciente de $\mathbb{R}$ sobre el intervalo abierto $(-1,1)$; su recíproca *argth* [argumento tangente hiperbólica] será una biyección creciente de $(-1,1)$ sobre $\mathbb{R}$, con derivada $arg\,th'x = \dfrac{1}{1-th^2(arg\,thx)} = \dfrac{1}{1-x^2}$; y la cotangente hiperbólica es una biyección decreciente de $\mathbb{R}^*$ sobre $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, no definida en $x=0$; su recíproca *argcoth* [argumento



cotangente hiperbólica] será una biyección decreciente de $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ sobre $\mathbb{R}^*$ con derivada $arg\,coth'\,x =$

$$= \frac{1}{1-coth^2(arg\,coth\,x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Con todo ello, las gráficas de las cuatro funciones tendrán el aspecto que indican respectivamente las tres figuras (trazo continuo), la última de las cuales contiene a la vez las de $arg\,th$ y $arg\,coth$.

Por otro lado, puesto que las funciones hiperbólicas se definen a partir de la exponencial, es natural pensar que sus recíprocas puedan expresarse como logaritmos. Veamos que es así. De la propia definición de las funciones resulta que $sh\,y + ch\,y = e^y$, o bien $y = log(sh\,y + ch\,y)$. Sea $y = arg\,sh\,x$, es decir, $x = sh\,y$; por la relación fundamental es $ch\,y = \sqrt{1+sh^2 y}$, luego $y = arg\,sh\,x = log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. Análogamente se deduce que $y = arg\,ch\,x = log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$. Si se trata de $y = arg\,th\,x$, de $x = th\,y$ y $1-th^2 y = \frac{1}{ch^2 y}$ se obtiene $ch\,y = \frac{1}{\sqrt{1-th^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $sh\,y = th\,y \cdot ch\,y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $ch\,y + sh\,y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ y finalmente $y = \frac{1}{2} log \frac{1+x}{1-x}$; y para $y = arg\,coth\,x$, con un razonamiento análogo se obtiene $y = \frac{1}{2} log \frac{x+1}{x-1}$, con lo cual las dos últimas funciones pueden reunirse como $y = \frac{1}{2} log \left|\frac{1+x}{1-x}\right|$, función definida para $|x| \neq 1$.

Ecuaciones

Llamamos *ecuación* a una igualdad $f(x)=0$. Sus *raíces* son los reales que la verifican idénticamente, llamados también *ceros* de la función *f*. *Resolver* la ecuación es encontrar todas estas raíces.

Ello suele hacerse en dos fases: en la primera, llamada *separación* de raíces, tratamos de encontrar unos subintervalos en cada uno de los cuales se encuentra una y sólo una de ellas, lo que nos permite también saber cuántas existen; en la segunda, *aproximación* de raíces, buscamos numéricamente el valor de cada una de ellas, con las cifras decimales que necesitemos.

Separación de raíces. Método de Rolle

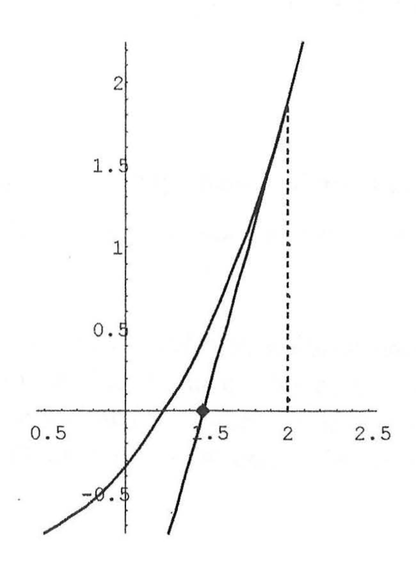
Sea una ecuación $f(x)=0$, con *f* de clase al menos C^1 en su intervalo de definición $[a,b]$. Supongamos que conocemos las raíces de la ecuación derivada $f'(x)=0$, y que s_1 y s_2 son dos de ellas tales que $a < s_1 < s_2 < b$ y que $f'(x)$ no se anula en (s_1,s_2).

Entonces, en este último intervalo existe como máximo *una* raíz r de la ecuación dada $f(x)=0$, ya que si existieran dos, r_1 y r_2, de $f(r_1)=f(r_2)[=0]$, según el teorema de Rolle f' habría de ser nula en algún valor intermedio, lo que no es cierto. ¿Cómo sabremos si existe una o no existe ninguna? Bastará examinar los signos de $f(s_1)$ y $f(s_2)$; si son opuestos hay una, si iguales ninguna. Y lo mismo en los subintervalos extremos, (a, s_{min}) y (s_{max}, b).

Ejemplo

Sea la ecuación $x^2-4x+log\,x=0$. El intervalo de definición de la función es $(0,\infty)$ y la ecuación derivada $2x-4+\frac{1}{x}=0$, $2x^2-4x+1=0$, cuyas raíces son $x=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{4}=$ $=1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ambas en $(0,\infty)$. Luego habrá que estudiar los signos de los valores que toma f en $x=0$ [éste es naturalmente un *límite*, no propiamente un valor], $x=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $x\to\infty$ [otro límite], que son por ese orden $-\infty$, $-2{,}31$, $-3{,}38$ e ∞ [el segundo y el tercero aproximados], observándose que hay un único cambio de signo, en el intervalo $\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$; la ecuación tiene *una única raíz*, en este último intervalo.

Aproximación de raíces. Método de Newton



Al hablar de diferenciabilidad veíamos que, dada una función f derivable en un punto $x=x_0$, la diferencial proporcionaba una *buena* aproximación lineal a la misma, o bien, en términos geométricos, era la ecuación de la tangente a la gráfica de f en dicho punto. En esto se basa el método de Newton, que vamos a exponer haciendo una pequeña incursión en el Cálculo Numérico.

Sea la ecuación $f(x)=0$, con f de clase C^1, y sea (α,β) un intervalo en el que hemos localizado una raíz r. El método consiste en sustituir la ecuación dada por la de su tangente en un punto del intervalo, x_0; la nueva ecuación será $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$, cuya raíz es $x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, valor que *podría* ser más próximo a r que ese valor inicial elegido (en la figura la raíz está en el intervalo $(1,2)$, se ha tomado como valor inicial $x_0=2$ y el valor obtenido con el método está señalado por un punto negro).

En la práctica el método se aplica reiteradamente, tomando cada vez como valor inicial el obtenido en el anterior paso, es decir, se van calculando los valores $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, etc., que van formando una sucesión de aproximaciones *cada vez mejores* si ha sido *buena* la elección de la primera (si no fuera así, iniciaríamos de nuevo el proceso con otro valor inicial).

Ejemplo 1

Volvamos a la ecuación anterior, $x^2 - 4x + log\,x = 0$, en la que habíamos encontrado una única raíz r mayor que $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 1{,}7$. Sabiendo ya que es la única, podemos acotarla en un intervalo más cómodo, de extremos enteros por ejemplo, y como f es creciente, estudiamos $f(x)$ para valores de x enteros y ≥ 1 hasta encontrar el primero para el que sea positiva; $f(2) = -4 + log\,2 < 0$, $f(3) = -3 + log\,3 < 0$, $f(4) = log\,4 > 0$: luego $r \in (3,4)$.

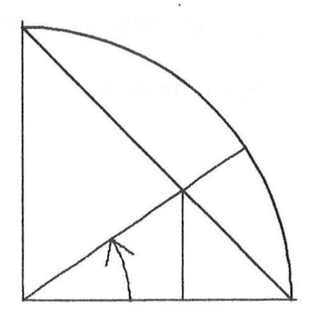
Tomemos como valor inicial $x_0 = 4$, por ejemplo, y operemos con cuatro cifras decimales, que es la aproximación que supuestamente necesitamos; tenemos:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^2 - 4x_0 + log\,x_0}{2x_0 - 4 + \frac{1}{x_0}} = 4 - \frac{log\,4}{8 - 4 + \frac{1}{4}} = 4 - \frac{8\,log\,2}{17} = 3{,}6738,$$

$$x_2 = 3{,}6738 - \frac{f(3{,}6738)}{f'(3{,}6738)} \simeq 3{,}6454, \quad x_3 = 3{,}6454 - \frac{f(3{,}6454)}{f'(3{,}6454)} \simeq 3{,}6452,$$

$x_4 = 3{,}6452 - \frac{f(3{,}6452)}{f'(3{,}6452)} \simeq 3{,}6452$, es decir, el valor se repite ya (las diferencias a partir de ahora están más allá de la cuarta cifra); luego, con cuatro cifras decimales, la raíz de la ecuación es $r = 3{,}6452$ (puede comprobarse que $f(3{,}6452) \simeq 0{,}00009$).

Ejemplo 2



Supongamos que queremos dividir en tres partes iguales el área encerrada por un arco de circunferencia de amplitud $\frac{\pi}{2}$ y radio r y su cuerda, mediante dos radios del arco. Calculemos x, el ángulo indicado en la figura (el otro radio será simétrico, naturalmente). El área de la unión de los tres recintos es $\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$ (sector circular menos triángulo rectángulo), y si es

h la altura del triángulo inferior, de $tg\,x = \dfrac{h}{r-h}$ resulta $h = \dfrac{r\,tg\,x}{1+tg\,x}$ y el área del recinto inferior es $\dfrac{xr^2}{2} - \dfrac{r^2\,tg\,x}{2(1+tg\,x)}$, con lo que la condición pedida es $\dfrac{xr^2}{2} - \dfrac{r^2 \cdot tg\,x}{2(1+tg\,x)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi r^2}{4} - \dfrac{r^2}{2}\right)$, y simplificando, $f(x) = 6x\,tg\,x - (\pi+4)tg\,x + 6x - \pi + 2 = 0$, que es la ecuación que hay que resolver. La función f es continua y derivable en $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, intervalo en el que existe una sola raíz; $f'(x) = 6tg\,x + 6x(1+tg^2x) - (\pi+4)(1+tg^2x) + 6$;

Newton: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$; tomando $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ por ejemplo, resulta, con seis cifras, $x_1 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi-2}{\pi+4} = 0{,}625547$, $x_2 = 0{,}593824$, $x_3 = 0{,}592713$, $x_4 = 0{,}592712 = x_5$: luego $x = 0{,}592712\,(= 33^\circ 57' 36'')$.

Derivadas sucesivas

Si una función f es derivable en un intervalo I queda definida en I, como hemos visto, la *función derivada* $x \mapsto f'(x)$. Naturalmente, esta función puede a su vez ser derivable, en cuyo caso a su derivada se la llama *derivada segunda,* f'', de f en I. Repitiendo el proceso, queda definida, en caso de existir, la *derivada n-ésima*, o *derivada de orden n* de f, $f^{(n)}$, como derivada de $f^{(n-1)}$. Si una función admite derivadas hasta la de orden n, siendo ésta última $f^{(n)}$ también *continua*, se dice que f es *de clase* C^n en I.

Ejemplos

1. La función $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, admite en $\mathbb{R}$ derivadas de cualquier orden, siendo $f'(x) = nx^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$, ... , $f^{(n)}(x) = n!$, $f^{(n+1)}(x) = f^{(n+2)}(x) = \cdots = 0$, es decir, esta función es de clase C^m para todo $m \in \mathbb{N}$.

2. Sabemos que la función $f(x) = sen\,x$ admite también en $\mathbb{R}$ derivadas de cualquier orden, siendo $f'(x) = cos\,x$, $f''(x) = -sen\,x$, $f'''(x) = -cos\,x$, $f^{(4)}(x) = sen\,x$, repitiéndose a partir de aquí las derivadas periódicamente, lo que también puede escribirse así: $f^{(n)}(x) = sen\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$; la función *sen* es también, pues, de clase C^m para todo $m \in \mathbb{N}$.

3. Función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$, $x > -1$; $f'(x) = -\dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$,

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}} = \frac{1\cdot 3}{2^2}(1+x)^{-\frac{5}{2}},\ f'''(x) = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}(1+x)^{-\frac{7}{2}},\ \text{y}$$

$f^{(n)}(x)=(-1)^n \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n}(1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}$, siempre para $x>-1$, como puede compruebarse por inducción sin más que derivar esta última expresión.

Derivada n-ésima de un producto

Teorema (Leibniz). Sean u y v dos funciones derivables n veces en un intervalo I; entonces la función producto $u\cdot v$ es n veces derivable en I, y

$$(u\cdot v)^{(n)}=\binom{n}{0}u^{(n)}\cdot v+\binom{n}{1}u^{(n-1)}\cdot v'+\binom{n}{2}u^{(n-2)}\cdot v''+\cdots+\binom{n}{n-1}u'\cdot v^{(n-1)}+\binom{n}{n}u\cdot v^{(n)}.$$

Demostración. Por inducción sobre n.

Base inductiva. Para $n=1$ reencontramos la expresión de la derivada del producto de dos funciones: $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$.

Paso inductivo. Supongamos la fórmula verdadera para un cierto valor de n, y sean u y v derivables $n+1$ veces. Será

$$(u\cdot v)^{(n+1)}=\left((u\cdot v)^{(n)}\right)'=\binom{n}{0}\left(u^{(n+1)}\cdot v+u^{(n)}\cdot v'\right)+\binom{n}{1}\left(u^{(n)}\cdot v'+u^{(n-1)}\cdot v''\right)+$$
$$+\binom{n}{2}\left(u^{(n-1)}\cdot v''+u^{(n-2)}\cdot v'''\right)+\cdots+\binom{n}{n-1}\left(u''\cdot v^{(n-1)}+u'\cdot v^{(n)}\right)+$$
$$+\binom{n}{n}\left(u'\cdot v^{(n)}+u\cdot v^{(n+1)}\right)\overset{(*)}{=}\binom{n+1}{0}u^{(n+1)}\cdot v+\binom{n+1}{1}u^{(n)}\cdot v'+\binom{n+1}{2}u^{(n-1)}\cdot v''+$$
$$+\cdots+\binom{n+1}{n}u'\cdot v^{(n)}+\binom{n+1}{n+1}u\cdot v^{(n+1)},$$ $^{(*)}$ por la identidad $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$;

es decir, la expresión se verifica para el valor $n+1$. ■

Ejemplos

1. $f(x)=x^3\cos x$; $u(x)=x^3$, $u'(x)=3x^2$, $u''(x)=6x$, $u'''(x)=6$, $u^{iv}(x)=0=\cdots$;

$v(x)=\cos x$, $v^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$; $f^{(n)}(x)=x^3\cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)+$

$+\binom{n}{1}3x^2\cos\left(x+(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right)+\binom{n}{2}6x\cos\left(x+(n-2)\dfrac{\pi}{2}\right)+\binom{n}{3}6\cos\left(x+(n-3)\dfrac{\pi}{2}\right)$, que

simplificado da $f^{(n)}(x)=\left(x^3-3n(n-1)x\right)\cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)+$

$+\left(3nx^2-n(n-1)(n-2)\right)\operatorname{sen}\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. Dada $y = xe^{\frac{1}{x}}$, demostrar que $x^2y' - (x-1)y = 0$ y hallar una fórmula de recurrencia entre $y^{(n+1)}$, $y^{(n)}$ e $y^{(n-1)}$ en general, y entre $y^{(n+1)}(1)$, $y^{(n)}(1)$ y $y^{(n-1)}(1)$ en particular. Derivando la función se obtiene $y' = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$, y multiplicando ambos miembros por x^2, $x^2y' = (x-1)xe^{\frac{1}{x}} = (x-1)y$, la expresión buscada; derivando ésta n veces por la fórmula de Leibniz resulta $x^2y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} - -(x-1)y^{(n)} - ny^{(n-1)} = 0$, $x^2y^{(n+1)} + ((2n-1)x+1)y^{(n)} + n(n-2)y^{(n-1)} = 0$, que es la primera fórmula de recurrencia, entre funciones, pedida. Haciendo $x = 1$ obtenemos la segunda, entre números reales: $y^{(n+1)}(1) + 2ny^{(n)}(1) + n(n-2)y^{(n-1)}(1) = 0$.

Esta fórmula nos permite calcular fácilmente los valores de y y sus derivadas en $x = 1$. De $y(1) = e$, $y'(1) = 0$ resulta, haciendo en la fórmula $n = 1$, $y''(1) + 2y'(1) - y(1) = 0$, $y''(1) = e$; y haciendo $n = 2$, $y'''(1) + 4y''(1) = 0$, $y'''(1) = -4e$; y para sucesivos valores de n, $y^{(4)}(1) + 6y'''(1) + 3y''(1) = 0$, $y^{(4)}(1) = 21e$, $y^{(5)}(1) = -136e$, etc.

Apéndice 1: Relación de orden

Una *relación de orden* en un conjunto *E* es una relación binaria $\preceq$ en *E* con las siguientes propiedades:

1) reflexiva: $\forall x \in E : x \preceq x$;

2) antisimétrica: $\forall x, y \in E : \left.\begin{matrix} x \preceq y & \& \\ y \preceq x & \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y$;

3) transitiva: $\forall x, y, z \in E : \left.\begin{matrix} x \preceq y & \& \\ y \preceq z & \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \preceq z$.

Ejemplos

1. En el conjunto de las partes de un conjunto cualquiera *E*, $\mathscr{P}(E)$, la relación de inclusión $\subseteq$ es una relación de orden.

2. En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ la relación $\leq$ es una relación de orden.

Orden total y orden parcial

En el *Ejemplo 1* de más arriba hay elementos que *no son comparables:* la relación $\subseteq$ no se verifica entre ellos en ningún orden. Por ejemplo, si es $E = \mathbb{N}$, $A = \{2,5,13\}$ y $B = \{5,7,11,13\}$, $A \not\subseteq B$ y $B \not\subseteq A$: se dice que $\subseteq$ es una *relación parcial* de orden en el conjunto de las partes de *E*, $\mathscr{P}(E)$.

En el *Ejemplo 2* en cambio, la relación entre dos elementos se verifica siempre; si son *x* e *y* dos números reales, o bien $x \leq y$ o bien $y \leq x$ (o ambas): es una *relación total.*

En lo sucesivo nos limitaremos a $\mathbb{R}$ con la relación $\leq$.

Cotas

Si $A \subset \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ es tal que $\forall x \in A : x \leq b$, se dice que *b* es *una cota superior* de *A*. Y correlativamente, si $a \in \mathbb{R}$ es tal que $\forall x \in A : a \leq x$, *a* es *una cota inferior* de *A*.

Si existe una cota superior [resp. inferior] de un conjunto *A*, se dice que éste es un conjunto *superiormente* [resp. *inferiormente*] *acotado.* Si *A* es superior e inferiormente acotado se dice simplemente que es *acotado.* Es evidente que si $A \subset \mathbb{R}$ tiene *una* cota superior, entonces tiene *infinitas*, y lo mismo para las cotas inferiores.

Máximo y mínimo

Si *b* es una cota superior de un conjunto *A* y $b \in A$, se dice que *b* es *el máximo* de *A*: $b = max\, A$. Y si *a* es una cota inferior de un conjunto *A* y $a \in A$, se dice que *a* es *el mínimo* de *A*: $a = min\, A$.

Supremo e ínfimo

Si un conjunto A es superiormente acotado y el conjunto de sus cotas superiores tiene un mínimo β, decimos que éste es *el supremo* de A, $\beta = sup\,A$. Y si A es inferiormente acotado y el conjunto de sus cotas inferiores tiene un máximo α, éste es *el ínfimo* de A, $\alpha = inf\,A$.

Desde luego ni β ni α tienen por qué pertenecer a A; si uno de ellos, α por ejemplo, perteneciera a A, sería inmediatamente el *mínimo* de A, y si lo hiciera β, sería el *máximo*.

A la vista de las definiciones es evidente la *unicidad* del máximo, mínimo, supremo e ínfimo de un conjunto, en el supuesto de que existan.

Ejemplos

1. Sea el conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ de los números naturales; es un conjunto inferiormente pero no superiormente acotado; todo real $x \leq 0$ es cota inferior del mismo, y la máxima de ellas, el 0, pertenece a $\mathbb{N}$; luego existe $min\,\mathbb{N} = 0$.

2. Sea $A = \left\{ \frac{n+1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\}$; A es acotado, $max\,A = 2$, $\nexists min\,A$, $inf\,A = 1$.

De su definición se desprende que el supremo de un conjunto de números reales puede caracterizarse así: $\beta = sup\,A$ equivale a $\begin{cases} \forall x \in A : x \leq \beta \quad \& \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists y \in A : y > \beta - \varepsilon \end{cases}$ Y análogamente: $\alpha = inf\,A$ equivale a $\begin{cases} \forall x \in A : \alpha \leq x \quad \& \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists y \in A : y < \alpha + \varepsilon \end{cases}$

Apéndice 2: El número real (esquema)

Números. *Naturales*: $\mathbb{N} = \{0,1,2,\cdots\}$. *Teorema (inducción):* si $A \subset \mathbb{N}$, $0 \in A$ y $\forall n \in \mathbb{N}$: $n \in A \Rightarrow \Rightarrow (n+1) \in A$, entonces $A = \mathbb{N}$. *Enteros*: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$; anillo conmutativo ordenado. *Racionales*: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$; cuerpo conmutativo ordenado *no completo*: por ejemplo, $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q},\ x^2 < 2\}$ no tiene supremo. *Irracionales*: diagonal cuadrado lado unidad. **Reales**: *Definición: $\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo ordenado completo*, queriendo esto último decir que *toda parte no vacía y superiormente acotada tiene un supremo.* Por ejemplo, $B = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x^2 < 2\}$ tiene un supremo, $\sqrt{2}$.

Desde luego $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, siendo las inclusiones estrictas.

Biyección de $\mathbb{R}$ sobre los puntos de una recta: **la recta real**.

Ínfimo de una parte inferiormente acotada.

Densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. *Teorema:* en todo intervalo (a,b) de $\mathbb{R}$ hay un número racional y un número irracional.

Expresión decimal. Parte decimal periódica y no periódica.

Valor absoluto. *Definición:* $|x| = max\{x, -x\}$. Propiedades:

i) $\forall x \in \mathbb{R}$: $|x| \geq 0$, ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $|x+y| \leq |x| + |y|$, iv) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Potencias racionales

Naturales. *Definición:* $\forall x \neq 0$, $\begin{cases} x^0 = 1 \\ x^{n+1} = x^n \cdot x \end{cases}$ Enteras. *Definición:* $\forall x \neq 0$, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

Racionales en general: *Teorema:* $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists! y > 0 : y^n = x$. *Definición:* $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y}$;

Y si $\frac{p}{q}$ (irreducible) $\in \mathbb{Q}$: $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}$.

Leyes. Algebraicas:

i) $x^z y^z = (x\,y)^z$,

ii) $x^y x^z = x^{y+z}$,

iii) $\left(x^y\right)^z = x^{y\,z}$.

De orden: iv) $x > 1$, $y < z \Leftrightarrow x^y < x^z$,

v) $0 < x < 1$, $y < z \Leftrightarrow x^y > x^z$.

Potencias irracionales

Definición: $x > 1$, $y \in \mathbb{R} : x^y = sup\left\{x^r \mid r \in \mathbb{Q}, r \leq y\right\}$,

$$0 < x < 1 : x^y = \left(\left(x^{-1}\right)^y\right)^{-1}.$$

Leyes iguales a las de las potencias racionales.

De iv) y v) se sigue que, dado $a > 0$, $a \neq 1$, la aplicación $x \mapsto a^x$ es *inyectiva.*

Logaritmos

Teorema: $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $\exists ! y \in \mathbb{R} : a^y = x$.

Definición: $y = log_a x$.

Leyes

i) $log_a\left(x^y\right) = y\, log_a x$ [*dem:* $a^{log_a\left(x^y\right)} = x^y = \left(a^{log_a x}\right)^y \overset{iii)}{=} a^{y\, log_a x}$, e inyectividad],

ii) $log_a(x\,y) = log_a x + log_a y$, [*dem:* $a^{log_a(xy)} = xy = e^{log_a x} e^{log_a y} \overset{ii)}{=} \ldots$],

iii) $a > 1$: $x < y \Rightarrow log_a x < log_a y$. [$\ldots \overset{iv)}{=} \ldots$],

iv) $0 < a < 1$: $x < y \Rightarrow log_a x > log_a y$ [$\ldots \overset{v)}{=} \ldots$].

Cambio de base

$b^{log_b x} = x : log_a\left(b^{log_b x}\right) = \begin{cases} log_a x \\ log_b x \cdot log_a b \end{cases} : log_a x = log_a b \cdot log_b x$, o bien $log_b x = \dfrac{log_a x}{log_a b}$

(en particular, $log_a b \cdot log_b a = 1$).

Notación. En lo sucesivo $\boxed{log\, x \equiv log_e x}$

Intervalos

Acotados: sean a y b reales, con $a < b$; se llama *intervalo cerrado* de extremos a y b al conjunto $[a,b] = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| a \leq x \leq b\right\}$, *intervalo abierto* a $(a,b) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| a < x < b\right\}$ e *intervalos semiabiertos* a $[a,b) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| a \leq x < b\right\}$ y a $(a,b] =]a,b] = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| a < x \leq b\right\}$.

No acotados: son *cerrados* el intervalo $[a,\infty) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| a \leq x\right\}$ y el $(-\infty,b] = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \leq b\right\}$, y *abiertos* el $(a,\infty) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| a < x\right\}$, el $(-\infty,b) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x < b\right\}$ y el $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ (también se usa la notación $]a,b[$ para (a,b), $[a,b[$ para $[a,b)$, etc).

Entorno - punto interior

Definición: $A \subset \mathbb{R},\ x \in A: \left. \begin{cases} x \text{ punto interior de } A \\ A \text{ entorno de } x \end{cases} \right\} \Leftrightarrow \exists r > 0 : (x-r, x+r) \subset A$.

Propiedades: i) A, B entornos de $x \Rightarrow A \cap B$ entorno de x;
ii) A entorno de x & $A \subset B \Rightarrow B$ entorno de x.

Interior de A: $\overset{\circ}{A}$.

Punto de acumulación

Definición: $A \subset \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$: *x punto de acumulación de A* $\Leftrightarrow$ *todo entorno de x, E,* es *tal que* $(E - \{x\}) \cap A \neq \varnothing$.

Conjunto derivado de A: A^d.

Adherencia

Definición: $\overline{A} = A \cup A^d$.

Ejemplos

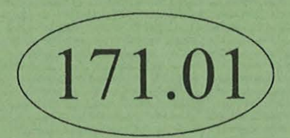
1. Si A es un intervalo de extremos a, b (abierto, semiabierto o cerrado), es $\overset{\circ}{A} = (a,b)$, $\overline{A} = [a,b]$.

2. $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \varnothing$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Es obvio que, para todo $A \subset \mathbb{R}$, es $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$. Si $A = \overset{\circ}{A}$, se dice que el conjunto A es *abierto*, y si $A = \overline{A}$, que es *cerrado*.

ÍNDICE

CUADERNO



CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
info@mairea-libros.com

